

# UN CRITERIO A BASE REGIONALE PER LA VALUTAZIONE DELLE PRESTAZIONI DEI MODELLI PROBABILISTICI FINALIZZATI ALLA STIMA DELLE PORTATE AL COLMO DI ELEVATO TEMPO DI RITORNO

Ugo Majone, Massimo Tomirotti, Giacomo Galimberti

\*

*SOMMARIO. Nella presente memoria viene approfondita l'analisi delle prestazioni di un criterio proposto dagli scriventi per l'individuazione della distribuzione di probabilità più adatta ad interpretare le serie storiche di portate di piena con particolare riferimento a valori elevati del tempo di ritorno. Tale criterio trae origine dall'analisi di una notevole mole di dati relativi alle portate massime annue registrate in circa 12000 stazioni idrometrografiche ubicate in diverse regioni del nostro pianeta. Le analisi mostrano da una parte che i test statistici di adattamento normalmente adottati danno risultati in accordo con la procedura proposta nel campo dei tempi di ritorno coperti dai dati sperimentali (o comunque dello stesso ordine) mentre non sono in grado di dare risposte affidabili quando le stime riguardano tempi di ritorno superiori. D'altra parte la metodologia proposta - applicata alle distribuzioni più comunemente utilizzate - è in grado di fornire indicazioni medie che possono essere particolarmente utili nella scelta dei modelli probabilistici per la costruzione di modelli regionali finalizzati alla stima delle portate al colmo in corrispondenza di tempi di ritorno particolarmente elevati (>100 anni).*

Parole chiave: portate al colmo di piena, modelli probabilistici, test statistici di adattamento, metodi di stima regionale.

## 1. INTRODUZIONE

Nell'analisi di frequenza delle piene e delle precipitazioni intense per assegnata durata, la scelta del modello costituisce senza dubbio una delle fasi più critiche e di maggiore incertezza (Meylan et al., 2012, Cap. 4), con effetti che diventano sempre più rilevanti all'aumentare del tempo di ritorno.

In un precedente lavoro (Majone et al., 2010) gli scriventi hanno presentato i risultati di una indagine statistica volta a verificare un metodo per l'individuazione dei modelli più adeguati ad interpretare probabilisticamente le serie storiche delle portate di piena e delle piogge intense con riferimento a tempi di ritorno molto elevati (>100 anni). In proposito vale infatti la pena osservare che se le indicazioni fornite dai classici test di adattamento possono risultare utili nel campo di valori coperti dalle osservazioni esse hanno scarso significato nelle estrapolazioni delle curve di frequenza di non superamento verso valori molto superiori rispetto a quelli osservati (Cunnane,

\*

---

Ugo Majone, Dipartimento di Ingegneria Civile e Ambientale – Politecnico di Milano; Massimo Tomirotti, Dipartimento di Ingegneria Civile, Architettura, Territorio, Ambiente e di Matematica (DICATAM) – Università degli Studi di Brescia; Giacomo Galimberti, Studio Maione Ingegneri Associati, Milano.

1989; Klemeš, 2000a-2000b), operazione che si rende invece necessaria nella quasi generalità dei casi a causa delle limitate dimensioni delle serie storiche disponibili rispetto ai tempi di ritorno di interesse tecnico.

Il metodo proposto prende le mosse da una analisi statistica condotta su una notevole mole di dati relativi a tali grandezze, in particolare con riferimento alle portate al colmo, per le quali sono state utilizzate le serie storiche relative a circa 12000 stazioni idrometrografiche distribuite in diverse regioni del nostro pianeta. Rinviando per ogni dettaglio all'articolo citato (o comunque ai richiami effettuati nel paragrafo successivo), da tali indagini è risultato che delle tre distribuzioni a due parametri prese in esame (MG, Gumbel e lognormale) la MG (Maione, 1997; Majone e Tomirotti, 2004; Majone et al., 2007) è quella che, nel campo dei valori di più elevati del tempo di ritorno  $T$ , cioè per gli eventi rari, fornisce i risultati più affidabili; estendendo l'analisi a modelli a tre parametri è risultato che la distribuzione MG generalizzata (Majone et al., 2009) fornisce in media prestazioni migliori rispetto alla GEV.

Nel presente lavoro l'analisi viene approfondita applicando la stessa procedura congiuntamente agli usuali test statistici di adattamento allo scopo di indagare particolarmente i seguenti aspetti:

1. confrontare i risultati forniti dalla procedura proposta per la valutazione delle prestazioni dei modelli probabilistici con quelli provenienti dai test di adattamento nel campo dei tempi di ritorno coperti dai dati sperimentali (o comunque dello stesso ordine);
2. verificare le prestazioni dei modelli MG e MG generalizzato rispetto alle altre distribuzioni di probabilità nelle condizioni più sfavorevoli, restringendo l'analisi ad insiemi di serie storiche rispetto alle quali l'adattamento migliore secondo i test di adattamento è fornito da funzioni di probabilità di volta in volta diverse (Gumbel, lognormale, GEV);
3. verificare se le indicazioni fornite dai test statistici di adattamento volti a individuare le funzioni di probabilità più adatte ad interpretare le serie storiche delle variabili in questione risulti ancora affidabile nel campo degli elevati valori del tempo di ritorno  $T$  (100÷500 anni).

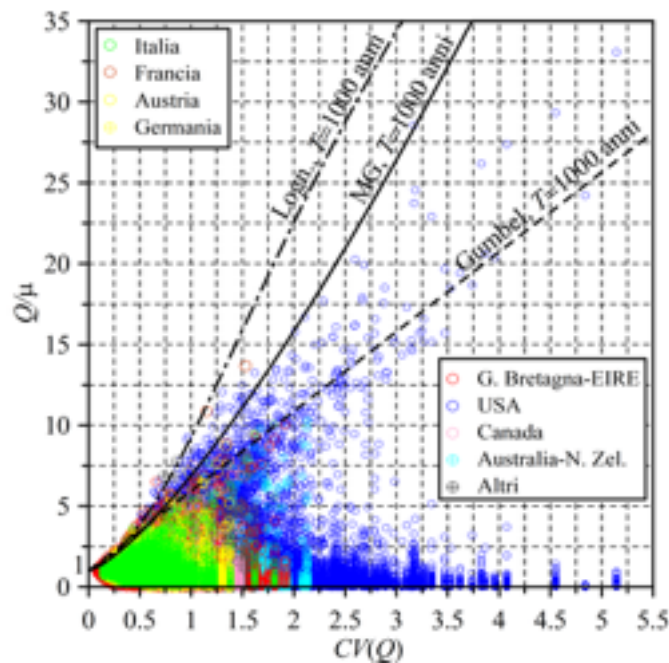
## **2. RICHIAMI SULLA PROCEDURA PROPOSTA**

La metodologia proposta per la valutazione delle prestazioni dei diversi modelli probabilistici consiste nel mettere a confronto, per ognuna delle funzioni di probabilità prese in considerazione, il tempo di ritorno di riferimento  $T$  con quello sperimentale  $T_s$  che si ottiene dividendo per il numero

totale ( $NTOT$ ) delle osservazioni il numero di dati sperimentali ( $N^+$ ) che risultano maggiori dei quantili forniti dal modello.

Con riferimento alla portata al colmo massima annua  $Q$ , nel caso di distribuzioni a due parametri stimati attraverso il metodo dei momenti tale operazione può essere visualizzata in un piano ( $CV, Q/\mu$ ), ove  $\mu$  e  $CV$  indicano rispettivamente media e coefficiente di variazione di  $Q$ ; un esempio relativo a  $T=1000$  anni e all'intera base di dati costituita da circa 12000 serie storiche con numerosità minima  $NMIN$  pari a 20 è mostrato nel diagramma di Fig. 1, ove accanto ai valori sperimentali sono tracciate le curve corrispondenti ai quantili delle distribuzioni di Gumbel, lognormale e MG; per quest'ultimo modello il quantile è fornito dall'espressione (es. Majone et al., 2004)

$$\frac{Q}{\mu} = 1 + (0.37 + 0.80 \ln T) CV^{1.33} \quad (1)$$



**Fig. 1.** Dispersione dei valori  $Q/\mu$  nel piano ( $CV, Q/\mu$ ) e quantili millenari ottenuti dalla distribuzione di Gumbel, dalla lognormale e dal modello MG ( $NMIN=20$ )

Con l'intento di estendere l'analisi alle distribuzioni a tre parametri, e in particolare alla GEV e alla MG generalizzata, si è preferito applicare la procedura sopra descritta al sottoinsieme delle serie storiche aventi numerosità minima  $NMIN$  pari a 40, valore al quale – come si vede dalle tabelle presentate nel presente paragrafo e nei successivi – corrispondono dimensioni medie  $NMED$  delle

serie considerate nelle elaborazioni prossime ai 60 anni; tale scelta deriva dalla necessità di rendere più robusta la stima dei parametri delle distribuzioni e di consentire un confronto più omogeneo con le elaborazioni ottenute utilizzando i test statistici di adattamento (v. paragrafi 3-4), per le quali è necessario impiegare campioni quanto più lunghi possibile conservando nel contempo un numero sufficiente di dati per la stima delle frequenze di superamento sperimentali e quindi del tempo di ritorno  $T_s$ .

I quantili del modello MG generalizzato sono forniti dall'espressione (Majone et al., 2009)

$$\frac{Q}{\mu} = 1 + [0.636\gamma + 0.673 + (0.0563\gamma + 0.282) \ln T] CV^{0.935},$$

(2)

mentre quelli della GEV si possono ottenere tramite l'espressione

$$Q = \xi + \frac{\alpha}{k} \left\{ 1 - \left[ -\ln\left(1 - \frac{1}{T}\right) \right]^k \right\},$$

(3)

in proposito è appena il caso di osservare che applicando la GEV alle serie della variabile normalizzata  $Q/\mu$  la (3) si può scrivere nella forma

$$\frac{Q}{\mu} = 1 + \frac{\alpha}{k} \left\{ \Gamma(1+k) - \left[ -\ln\left(1 - \frac{1}{T}\right) \right]^k \right\},$$

(4)

dove  $\Gamma(\cdot)$  indica la funzione Gamma di Eulero. Come è noto, per  $k \rightarrow 0$  la GEV si riduce alla distribuzione di Gumbel.

Per la taratura della GEV è stato preso come riferimento il metodo dei momenti pesati in probabilità (PWM; Hosking et al., 1985); per le altre distribuzioni la stima dei parametri è stata effettuata attraverso il metodo dei momenti (MOM); quest'ultimo è stato comunque applicato anche alla GEV per completezza di analisi.

I risultati ottenuti dalle elaborazioni sono riportati in Tab. 1; per facilitare l'interpretazione del contenuto della tabella vale la pena di rilevare che le disuguaglianze  $T_s < T$  e  $T_s > T$  indicano rispettivamente una tendenza alla sottostima e alla sovrastima dei quantili delle portate al colmo da parte del generico modello probabilistico.

Ad esempio, secondo la distribuzione lognormale, su 222896 portate di piena registrate nelle 3852 stazioni considerate (*NSERIE*), 48 sarebbero state di intensità superiore a quella delle piene aventi tempo di ritorno di 1000 anni. Secondo le distribuzioni di Gumbel e MG, le piene di tempo di ritorno >1000 anni sarebbero invece rispettivamente 560 e 345. A tali valori del numero di piene secondo le distribuzioni considerate corrispondono valori del tempo di ritorno  $T_s$  pari, rispettivamente, a 4644 anni (lognormale), 398 anni (Gumbel) e 646 anni (MG), con scostamenti rispetto al tempo di ritorno di 1000 anni, col quale sono state calcolate, pari rispettivamente al 364.37% (lognormale) -60.20% (Gumbel) e -35.39% (MG), passando da una rilevante tendenza alla sovrastima nel primo caso ad una tendenza alla sottostima nel secondo e, seppure in misura minore, nel terzo. Includendo le distribuzioni a 3 parametri MG generalizzata (MGGEN) e GEV – tarata sia con il metodo dei momenti pesati in probabilità (GEVPWM) sia con l’ordinario metodo dei momenti (GEVMOM) – si vede che tutti i modelli considerati presentano per i tempi di ritorno maggiori una tendenza alla sovrastima, contenuta nel caso della MGGEN mentre apprezzabilmente più marcata per la GEV ed in particolare per il modello GEVMOM, con scostamenti rispetto ai tempi di ritorno sperimentali rispettivamente pari a 66.35%, 178.62% e 7329.87% per  $T=1000$  anni. Poiché la distribuzione GEV viene in pratica utilizzata solo per valori del parametro di forma  $k \leq 0$  (risultando per gli altri valori di  $k$  limitata superiormente), per una migliore comprensione delle prestazioni di tale distribuzione le stesse elaborazioni sono state ripetute sul sottoinsieme delle serie storiche per le quali risultasse soddisfatta la condizione di cui sopra; i risultati ottenuti sono presentati nelle ultime colonne di Tab. 1.

Come si vede, cresce in tal caso la tendenza alla sovrastima da parte della GEV in corrispondenza dei tempi di ritorno più elevati mentre cresce la tendenza alla sottostima da parte della MG e, in misura più marcata, della Gumbel. Quest’ultima circostanza può essere spiegata facilmente considerando che al nuovo sottoinsieme di dati appartengono prevalentemente le serie storiche caratterizzate da valori maggiori del coefficiente di asimmetria, come indicato dai valori medi ( $\gamma_{med}$ ) di tale parametro. Dall’esame di Tab. 1 emerge comunque chiaramente che nel campo dei tempi di ritorno più elevati le prestazioni migliori derivano dalla MG nel caso delle distribuzioni a 2 parametri e dalla MG generalizzata nel caso delle distribuzioni a 3 parametri, come si era anticipato nel paragrafo precedente.

**Tab. 1.** Risultati delle elaborazioni relative all'insieme delle serie storiche con  $NMIN=40$

		$NTOT=222896, NSERIE=3852$ $NMED= 57.87, \gamma_{med}=1.72$ $k$ qualunque			$NTOT=138883, NSERIE=2389$ $NMED=58.13, \gamma_{med}=2.34$ $k \leq 0$		
MODELLO	$T$ (anni)	$N^+$	$T_s$ (anni)	Scost. (%)	$N^+$	$T_s$ (anni)	Scost. (%)
MG	25	-	-	-	-	-	-
GUMBEL	25	9484	24	-5.99	6365	22	-12.72
LOGN.	25	9324	24	-4.38	6282	22	-11.57
MGGEN	25	-	-	-	-	-	-
GEVMOM	25	9899	23	-9.93	6323	22	-12.14
GEVPWM	25	9276	24	-3.88	6166	23	-9.9
MG	50	3950	56	12.86	2814	49	-1.29
GUMBEL	50	5341	42	-16.53	4177	33	-33.5
LOGN.	50	4601	48	-3.11	3546	39	-21.67
MGGEN	50	3510	64	27.01	2147	65	29.37
GEVMOM	50	5452	41	-18.23	3824	36	-27.36
GEVPWM	50	4362	51	2.2	3119	45	-10.94
MG	100	2384	93	-6.5	1888	74	-26.44
GUMBEL	100	3121	71	-28.58	2773	50	-49.92
LOGN.	100	2161	103	3.14	1869	74	-25.69

MGGEN	100	2239	100	-0.45	1454	96	-4.48
GEVMOM	100	2866	78	-22.23	2227	62	-37.64
GEVPWM	100	1887	118	18.12	1380	101	0.64
MG	200	1401	159	-20.45	1210	115	-42.61
GUMBEL	200	1846	121	-39.63	1753	79	-60.39
LOGN.	200	904	247	23.28	825	168	-15.83
MGGEN	200	1221	183	-8.72	816	170	-14.9
GEVMOM	200	1161	192	-4.01	966	144	-28.11
GEVPWM	200	727	307	53.3	495	281	40.29
MG	500	646	345	-30.99	588	236	-52.76
GUMBEL	500	931	239	-52.12	911	152	-69.51
LOGN.	500	175	1274	154.74	158	879	75.8
MGGEN	500	375	594	18.88	249	558	11.55
GEVMOM	500	93	2397	379.35	76	1827	265.48
GEVPWM	500	186	1198	139.67	93	1493	198.67
MG	1000	345	646	-35.39	320	434	-56.6
GUMBEL	1000	560	398	-60.2	552	252	-74.84
LOGN.	1000	48	4644	364.37	39	3561	256.11
MGGEN	1000	134	1663	66.34	96	1447	44.67
GEVMOM	1000	3	74299	7329.87	1	138883	13788.3
GEVPWM	1000	80	2786	178.62	21	6613	561.35

### **3. CONFRONTO CON LE INDICAZIONI FORNITE DAI TEST DI ADATTAMENTO: APPLICAZIONE ALLE DISTRIBUZIONI A DUE PARAMETRI**

Per rispondere ai quesiti posti nell'introduzione circa l'attendibilità delle indicazioni fornite dai test statistici di adattamento e approfondire l'analisi delle prestazioni dei modelli MG e MG generalizzato a confronto con gli altri modelli probabilistici più utilizzati nell'analisi delle portate di piena, sono state condotte elaborazioni analoghe a quelle descritte nel paragrafo precedente su sottoinsiemi formati dalle serie storiche per le quali la distribuzione di volta in volta presa a riferimento (Gumbel, lognormale, GEV) presentasse, sulla base del test di Pearson, il migliore

adattamento (cioè superasse il test per il livello di significatività più alto e comunque non inferiore al 5%).

A questo proposito deve essere osservato che il test non risulta applicabile ai modelli MG e MG generalizzato, dato che il loro utilizzo è giustificato solo per tempi di ritorno superiori a 50 anni; il criterio di analisi sopra illustrato risulta così particolarmente severo nei confronti di questi due ultimi modelli, che in nessuno dei casi esaminati figurano come distribuzioni di riferimento.

L'adozione del test di Pearson è infine motivata, oltre che dalla sua ampia diffusione, dal fatto che, modificando i gradi di libertà della variabile  $\chi^2$  che interviene nella definizione della regione di accettazione, esso permette di tener conto del diverso numero di parametri stimati per i vari modelli probabilistici a partire dalle serie storiche della variabile  $Q/\mu$  utilizzate per l'esecuzione del test stesso.

Nel presente paragrafo l'analisi viene ristretta alle distribuzioni a due parametri; l'estensione al caso delle distribuzioni a tre parametri verrà presentata nel paragrafo successivo.

In Tab. 2 sono mostrati i risultati ottenuti prendendo a riferimento rispettivamente la distribuzione di Gumbel e la distribuzione lognormale.

**Tab. 2.** Risultati delle elaborazioni basate sull'utilizzo dei test statistici di adattamento ( $NMIN=40$ ); applicazione alle distribuzioni a 2 parametri

		<i>NTOT=58045, NSERIE=1003, NMED=57.87, <math>\gamma_{med}=1.01</math> distr. di riferimento: Gumbel</i>			<i>NTOT=119680, NSERIE=2056, NMED=58.21, <math>\gamma_{med}=1.90</math> distr. di riferimento: lognormale</i>		
MODELLO	<i>T</i> (anni)	$N^+$	$T_s$ (anni)	Scost. (%)	$N^+$	$T_s$ (anni)	Scost. (%)
MG	25	-	-	-	-	-	-



GUMBEL	25	2294	25	1.21	5322	22	-10.05
LOGN.	25	2233	26	3.98	5208	23	-8.08
MG	50	920	63	26.18	2289	52	4.57
GUMBEL	50	1079	54	7.59	3188	38	-24.92
LOGN.	50	939	62	23.63	2710	44	-11.68
MG	100	502	116	15.63	1393	86	-14.08
GUMBEL	100	503	115	15.4	1932	62	-38.05
LOGN.	100	381	152	52.35	1284	93	-6.79
MG	200	252	230	15.17	817	146	-26.76
GUMBEL	200	220	264	31.92	1161	103	-48.46
LOGN.	200	128	453	126.74	513	233	16.65
MG	500	95	611	22.2	355	337	-32.57
GUMBEL	500	59	984	96.76	594	201	-59.7
LOGN.	500	23	2524	404.74	82	1460	191.9
MG	1000	42	1382	38.2	174	688	-31.22
GUMBEL	1000	18	3225	222.47	342	350	-65.01
LOGN.	1000	9	6449	544.94	15	7979	697.87

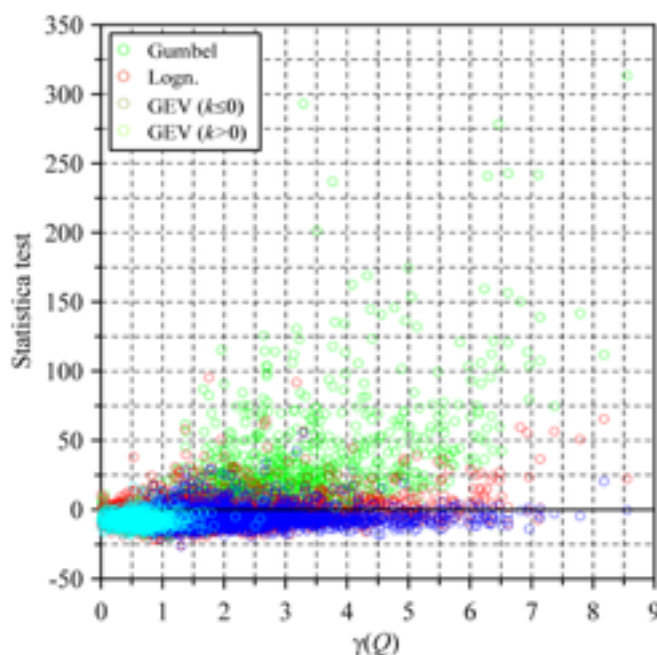
Come si vede dalla tabella, per tempi di ritorno dell'ordine della numerosità media dei campioni (25, 50 anni) e anche per tempi di ritorno superiori, fino ai 100 anni, come era da attendersi, la distribuzione di riferimento fornisce complessivamente il risultato migliore (anche se le prestazioni della MG risultano in tutti i casi sostanzialmente paragonabili). Per tempi di ritorno molto elevati (in particolare 500 e 1000 anni) non è detto invece che le prestazioni migliori provengano dal modello di riferimento; ad esempio, per  $T \geq 500$  anni la lognormale mostra una marcata tendenza alla sovrastima anche nel caso in cui il test di Pearson ne indica il migliore adattamento ai dati (per  $T=1000$  anni il suo comportamento risulterebbe addirittura in tal caso peggiore); d'altra parte la distribuzione di Gumbel presenta una marcata tendenza alla sovrastima nel caso in cui figura come modello di riferimento e una marcata tendenza alla sottostima nell'altro. Tale risultato è spiegabile sulla base del diverso comportamento delle due distribuzioni nei riguardi del coefficiente di asimmetria, costante per la Gumbel e variabile in funzione di  $CV$  per la lognormale secondo la relazione  $\gamma=CV^3+3CV$ ; gran parte delle serie storiche per le quali quest'ultima distribuzione presenta il migliore adattamento risultano infatti caratterizzate da valori di  $\gamma$  superiori rispetto a quello della Gumbel, come è anche testimoniato dal valore di  $\gamma_{med}$  (su tale aspetto si tornerà anche nel prossimo paragrafo).

Dalla Tab. 2 risulta anche che in corrispondenza dei tempi di ritorno più elevati il modello MG fornisce nel complesso prestazioni sensibilmente migliori in entrambi i casi esaminati.

#### 4. CONFRONTO CON LE INDICAZIONI FORNITE DAI TEST DI ADATTAMENTO: APPLICAZIONE ALLE DISTRIBUZIONI A TRE PARAMETRI

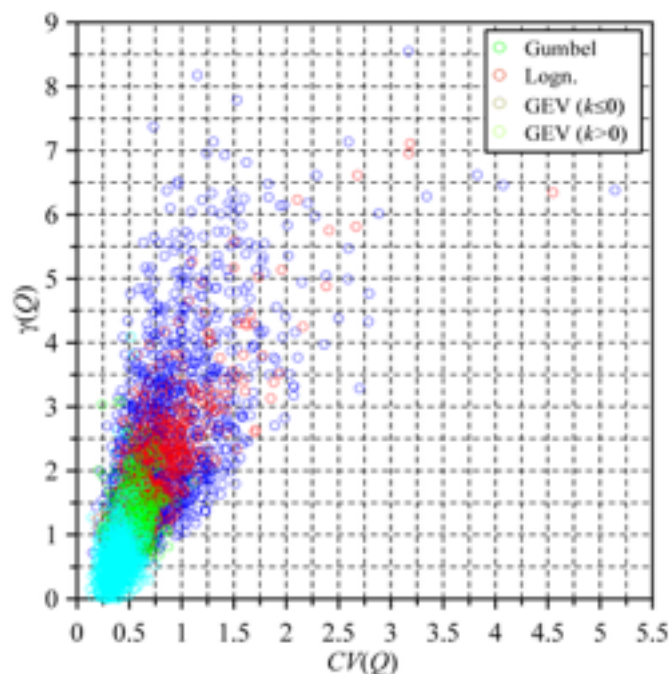
Elaborazioni analoghe a quelle presentate nel paragrafo precedente sono state condotte includendo distribuzioni a 3 parametri; in particolare sono state considerate la distribuzione GEV, ampiamente utilizzata sia in Italia che all'estero per l'analisi statistica delle precipitazioni intense e delle portate di piena, e il modello MG generalizzato (2), introdotto recentemente dagli scriventi. Così come per il modello MG, i test di adattamento non risultano applicabili a tale distribuzione, il cui impiego, come già ricordato, è giustificato solo per tempi di ritorno non inferiori a 50 anni.

In Fig. 2 è mostrata, in funzione del coefficiente di asimmetria campionario, la dispersione delle statistiche del test di Pearson (riferite ai valori critici corrispondenti al livello di significatività del 5%) per le distribuzioni di Gumbel, lognormale e GEVPWM tarate su tutte le serie storiche con numerosità  $\geq 40$ ; in tale rappresentazione la regione di accettazione del test è definita dai valori negativi dell'asse delle ordinate. Come si vede dal diagramma, tra le distribuzioni a due parametri la distribuzione lognormale presenta globalmente un grado di adattamento alle serie storiche considerate sensibilmente maggiore rispetto alla Gumbel; d'altra parte – come era lecito attendersi – includendo modelli a tre parametri la GEV presenta il grado di adattamento migliore.



**Fig. 2.** Dispersione delle statistiche del test di Pearson (riferite al valore critico) delle distribuzioni di Gumbel, lognormale e GEVPWM per le serie storiche utilizzate nelle elaborazioni ( $NMIN=40$ )

In Fig. 3 è invece mostrata la dispersione delle caratteristiche salienti ( $CV$  e  $\gamma$ ) delle serie storiche rispetto alle quali il migliore adattamento è fornito rispettivamente dalla distribuzione di Gumbel, dalla lognormale e dalla GEV. Tale diagramma mostra che la distribuzione di Gumbel fornisce le migliori prestazioni per serie storiche i cui punti rappresentativi ricadono in una regione abbastanza ristretta del piano ( $CV, \gamma$ ) vicina all'origine; apprezzabilmente più estesa risulta invece la regione cui corrisponde il migliore adattamento da parte della distribuzione lognormale, con punti rappresentativi che raggiungono valori di  $CV$  maggiori dell'unità e valori di  $\gamma$  superiori a 3. La regione spazzata dai punti corrispondenti alla GEV risulta infine di gran lunga la più ampia, stante la flessibilità assicurata dal maggior numero di parametri (in analogia con le osservazioni già fatte a proposito di Fig. 2). A questo riguardo vale la pena di segnalare come nella porzione del piano più vicina all'origine quest'ultima distribuzione presenti valori positivi del parametro di forma, come era lecito attendersi tenuto conto che per valori di  $\gamma$  minori rispetto a quello della Gumbel, la GEV risulta limitata superiormente.



**Fig. 3.** Dispersione dei valori campionari di  $CV$  e  $\gamma$  per gli insiemi delle serie storiche rispetto alle quali il migliore adattamento è fornito rispettivamente dalla distribuzione di Gumbel, dalla lognormale e dalla GEVPWM ( $NMIN=40$ )

Venendo ai risultati delle elaborazioni, per le stesse ragioni esposte nel paragrafo 2 si è preferito anzitutto considerare separatamente l'insieme delle serie storiche indipendentemente dal valore del parametro di forma della GEV (Tab. 3) e quello composto dalle serie storiche soddisfacenti la condizione  $k \leq 0$  (Tab. 4).

I risultati di Tab. 3 confermano le conclusioni tratte al paragrafo precedente circa le indicazioni fornite dal test di adattamento: esso è cioè in grado di individuare la distribuzione che fornisce le stime più affidabili nel campo dei tempi di ritorno coperti dalle serie storiche o comunque per estrapolazioni fino ai 100 anni; per i tempi di ritorno più elevati nella maggior parte dei casi la distribuzione che fornisce la prestazioni migliori non è quella di riferimento (ossia quella che supera il test per il livello di significatività più alto). In particolare le distribuzioni di Gumbel e la lognormale mostrano un comportamento simile a quello rilevato al paragrafo precedente: la prima presenta una tendenza alla sovrastima nel caso in cui viene assunta come distribuzione di riferimento e alla sottostima negli altri casi, mentre la seconda mostra una marcata tendenza alla sovrastima anche nel caso in cui viene scelta come distribuzione di riferimento. Nel campo delle distribuzioni a due parametri le prestazioni di gran lunga migliori derivano ancora una volta dalla MG; nel campo delle distribuzioni a tre parametri la distribuzione MG generalizzata fornisce prestazioni nettamente migliori rispetto alla GEV, che in corrispondenza ai tempi di ritorno più elevati presenta una marcata tendenza alla sovrastima anche nel caso in cui figura come distribuzione di riferimento. Le stesse conclusioni valgono per i risultati presentati in Tab. 4, ove l'unica differenza risiede nell'aumento della tendenza alla sovrastima nel caso delle distribuzioni a tre parametri (lieve nel caso della MG generalizzata mentre particolarmente accentuato per la GEV, anche nel caso in cui viene presa come distribuzione di riferimento) ed un complessivo slittamento verso il basso dei tempi di ritorno empirici valutati a partire dalle distribuzioni a due parametri. Tale effetto, come già osservato a proposito della Tab. 1, è una conseguenza del fatto che agli insiemi delle serie storiche di Tab. 4 corrispondono valori medi del coefficiente di asimmetria ( $\gamma_{med}$ ) superiori rispetto ai corrispondenti gruppi utilizzati per la costruzione di Tab. 3. Si noti poi che nel caso della distribuzione GEV tarata con il metodo dei momenti la tendenza alla sovrastima in corrispondenza dei tempi di ritorno maggiori è così accentuata che per  $T=1000$  anni in alcuni dei casi considerati nelle Tab. 3-4 non è possibile definire  $T_s$  (che risulterebbe infinito).

Globalmente si può dunque concludere che nel campo dei tempi di ritorno più elevati ( $T > 200$  anni) le stime più affidabili, qualunque sia l'insieme delle serie storiche di riferimento, sono quelle ottenute dai modelli MG e MG generalizzato.

La procedura proposta è stata poi applicata a gruppi di serie storiche caratterizzate da coefficienti di asimmetria appartenenti ad intervalli di valori crescenti ( $0.5 \pm 0.5$ ,  $1.0 \pm 0.5$ ,  $1.5 \pm 0.5$ ,  $2.0 \pm 0.5$ ,  $2.5 \pm 0.5$  e  $3 \pm 0.5$ ) al fine di saggiare le prestazioni dei vari modelli probabilistici al variare di tale parametro. Per semplicità le elaborazioni sono state condotte utilizzando come unico modello di riferimento distribuzione GEV, tenuto conto sia della sua ampia diffusione sia della maggiore flessibilità rispetto ai modelli a due parametri, derivante dalla possibilità di tenere esplicitamente in conto il coefficiente di asimmetria attraverso il parametro di forma; i risultati delle elaborazioni sono mostrati in Tab. 5a-b. Come già osservato relativamente alle Tabb. 3-4, anche in questo caso per alcuni dei modelli probabilistici non risulta possibile valutare  $T_s$  in corrispondenza dei tempi di ritorno più elevati. Tra le distribuzioni a due parametri le distribuzioni di Gumbel e MG, come era prevedibile sulla base delle osservazioni svolte nei paragrafi precedenti, mostrano una tendenza alla sottostima per i valori più bassi di  $\gamma$  e una tendenza alla sovrastima negli altri casi; globalmente la MG fornisce prestazioni migliori, soprattutto per i valori centrali di  $\gamma$ . La distribuzione lognormale mostra invece per i valori più elevati del tempo di ritorno una tendenza alla sovrastima che decresce al crescere di  $\gamma$ , fornendo le prestazioni migliori in corrispondenza dell'ultima classe caratterizzata da valori di  $\gamma$  decisamente elevati ( $\gamma = 3.0 \pm 0.5$ ).

Passando alle distribuzioni a 3 parametri, il modello GEVPWM – pur essendo la distribuzione di riferimento – mostra una marcata tendenza alla sovrastima per i tempi di ritorno più elevati<sup>1</sup>. L'eccezione costituita dal gruppo corrispondente al valore di  $\gamma$  più basso è dovuta al fatto che la distribuzione risulta in tal caso limitata superiormente per la grande maggioranza delle serie storiche (397 su 469); anche nella classe  $\gamma = 1.0 \pm 0.5$  tale circostanza si verifica in un numero significativo di casi (204 su 514). Assai maggiori diventano le sovrastime per i tempi di ritorno più elevati nel caso in cui i parametri della GEV vengono stimati con il metodo dei momenti. Infine le prestazioni della distribuzione MG generalizzata risultano nel complesso migliori rispetto a tutti gli altri modelli considerati.

---

<sup>1</sup> Ciò consiglia qualche cautela nel ricorrere, come unico strumento per l'individuazione della distribuzione di probabilità più idonea, ai diagrammi dei momenti lineari (L-moments), che sembrano condurre nella maggior parte dei casi alla scelta della GEV (es. Klemeš, 2000b).

**Tab. 3.** Risultati delle elaborazioni basate sull'utilizzo dei test statistici di adattamento ( $NMIN=40$ ); applicazione alle distribuzioni a 2 e a 3 parametri ( $k$  qualunque)

		<i>NTOT=35834, NSERIE=627, NMED=57.15, <math>\gamma_{med}=1.06</math> distr. di riferimento: Gumbel</i>			<i>NTOT=65046, NSERIE=1132, NMED=57.46, <math>\gamma_{med}=1.68</math> distr. di riferimento: lognormale</i>			<i>NTOT=100736, NSERIE=1722, NMED=58.5, <math>\gamma_{med}=1.99</math> distr. di riferimento: GEVPWM</i>		
MODELLO	$T$ (anni)	$N^+$	$T_s$ (anni)	Scost. (%)	$N^+$	$T_s$ (anni)	Scost. (%)	$N^+$	$T_s$ (anni)	Scost. (%)
MG	25	-	-	-	-	-	-	-	-	-
GUMBEL	25	1436	25	-0.18	2893	22	-10.06	4210	24	-4.29
LOGN.	25	1398	26	2.53	2818	23	-7.67	4132	24	-2.48
MGGEN	25	-	-	-	-	-	-	-	-	-
GEVMOM	25	1532	23	-6.44	2969	22	-12.37	4409	23	-8.61
GEVPWM	25	1387	26	3.34	2736	24	-4.9	4220	24	-4.52
MG	50	613	58	16.91	1214	54	7.16	1804	56	11.68
GUMBEL	50	693	52	3.42	1655	39	-21.39	2491	40	-19.12
LOGN.	50	614	58	16.72	1430	45	-9.03	2121	47	-5.01
MGGEN	50	591	61	21.27	1021	64	27.42	1586	64	27.03
GEVMOM	50	768	47	-6.68	1646	40	-20.96	2521	40	-20.08
GEVPWM	50	619	58	15.78	1280	51	1.63	2065	49	-2.43
MG	100	342	105	4.78	718	91	-9.41	1130	89	-10.85
GUMBEL	100	340	105	5.39	976	67	-33.35	1509	67	-33.24
LOGN.	100	262	137	36.77	634	103	2.6	1068	94	-5.68
MGGEN	100	401	89	-10.64	676	96	-3.78	970	104	3.85
GEVMOM	100	382	94	-6.19	870	75	-25.23	1362	74	-26.04
GEVPWM	100	286	125	25.29	501	130	29.83	941	107	7.05
MG	200	167	215	7.29	391	166	-16.82	729	138	-30.91
GUMBEL	200	148	242	21.06	539	121	-39.66	978	103	-48.5
LOGN.	200	81	442	121.2	221	294	47.16	523	193	-3.69

MGGEN	200	227	158	-21.07	371	175	-12.34	526	192	-4.24
GEVMOM	200	119	301	50.56	297	219	9.51	642	157	-21.55
GEVPWM	200	101	355	77.4	160	407	103.27	403	250	24.98
MG	500	56	640	27.98	143	455	-9.03	394	256	-48.86
GUMBEL	500	38	943	88.6	239	272	-45.57	565	178	-64.34
LOGN.	500	17	2108	321.58	30	2168	333.64	105	959	91.88
MGGEN	500	74	484	-3.15	118	551	10.25	153	658	31.68
GEVMOM	500	2	17917	3483.4	14	4646	829.23	62	1625	224.95
GEVPWM	500	27	1327	165.44	36	1807	261.37	101	997	99.48
MG	1000	26	1378	37.82	64	1016	1.63	222	454	-54.62
GUMBEL	1000	12	2986	198.62	125	520	-47.96	365	276	-72.4
LOGN.	1000	8	4479	347.93	7	9292	829.23	24	4197	319.73
MGGEN	1000	19	1886	88.6	47	1384	38.4	58	1737	73.68
GEVMOM	1000	0	-	-	1	65046	6404.6	2	50368	4936.8
GEVPWM	1000	13	2756	175.65	16	4065	306.54	36	2798	179.82

**Tab. 4.** Risultati delle elaborazioni basate sull'utilizzo dei test statistici di adattamento ( $NMIN=40$ ); applicazione alle distribuzioni a 2 e a 3 parametri ( $k \leq 0$ )

MODELLO	$T$ (anni)	$NTOT=12096, NSERIE=212,$ $NMED=57.06, \gamma_{med}=1.57$ distr. di riferimento: Gumbel			$NTOT=44678, NSERIE=776,$ $NMED=57.57, \gamma_{med}=2.09$ distr. di riferimento: lognormale			$NTOT=68673, NSERIE=1174,$ $NMED=58.49, \gamma_{med}=2.62$ distr. di riferimento: GEVPWM		
		$N^+$	$T_s$ (anni)	Scost. (%)	$N^+$	$T_s$ (anni)	Scost. (%)	$N^+$	$T_s$ (anni)	Scost. (%)
MG	25	-	-	-	-	-	-	-	-	-
GUMBEL	25	525	23	-7.84	2103	21	-15.02	3078	22	-10.76
LOGN.	25	512	24	-5.5	2045	22	-12.61	3028	23	-9.28
MGGEN	25	-	-	-	-	-	-	-	-	-
GEVMOM	25	516	23	-6.23	2081	21	-14.12	3068	22	-10.47
GEVPWM	25	500	24	-3.23	1988	22	-10.1	3033	23	-9.43
MG	50	279	43	-13.29	907	49	-1.48	1412	49	-2.73
GUMBEL	50	338	36	-28.43	1340	33	-33.32	2090	33	-34.28
LOGN.	50	301	40	-19.63	1140	39	-21.62	1760	39	-21.96
MGGEN	50	229	53	5.64	709	63	26.03	1013	68	35.58

GEVMOM	50	315	38	-23.2	1231	36	-27.41	1902	36	-27.79
GEVPWM	50	283	43	-14.52	987	45	-9.47	1556	44	-11.73
MG	100	184	66	-34.26	579	77	-22.84	978	70	-29.78
GUMBEL	100	219	55	-44.77	887	50	-49.63	1399	49	-50.91
LOGN.	100	159	76	-23.92	561	80	-20.36	982	70	-30.07
MGGEN	100	176	69	-31.27	485	92	-7.88	665	103	3.27
GEVMOM	100	203	60	-40.41	703	64	-36.45	1119	61	-38.63
GEVPWM	100	146	83	-17.15	396	113	12.82	724	95	-5.15
MG	200	104	116	-41.85	348	128	-35.81	670	102	-48.75
GUMBEL	200	112	108	-46	524	85	-57.37	950	72	-63.86
LOGN.	200	59	205	2.51	201	222	11.14	499	138	-31.19
MGGEN	200	109	111	-44.51	279	160	-19.93	363	189	-5.41
GEVMOM	200	61	198	-0.85	260	172	-14.08	560	123	-38.68
GEVPWM	200	43	281	40.65	115	389	94.25	299	230	14.84
MG	500	39	310	-37.97	127	352	-29.64	378	182	-63.67
GUMBEL	500	29	417	-16.58	237	189	-62.3	562	122	-75.56
LOGN.	500	12	1008	101.6	28	1596	219.13	102	673	34.65
MGGEN	500	28	432	-13.6	96	465	-6.92	104	660	32.06
GEVMOM	500	0	-	-	12	3723	644.63	51	1347	169.31
GEVPWM	500	11	1100	119.93	16	2792	458.48	56	1226	145.26
MG	1000	17	712	-28.85	61	732	-26.76	216	318	-68.21
GUMBEL	1000	10	1210	20.96	125	357	-64.26	365	188	-81.19
LOGN.	1000	7	1728	72.8	6	7446	644.63	24	2861	186.14
MGGEN	1000	8	1512	51.2	41	1090	8.97	40	1717	71.68
GEVMOM	1000	0	-	-	0	-	-	1	68673	6767.3
GEVPWM	1000	3	4032	303.2	3	14893	1389.27	10	6867	586.73

**Tab. 5a.** Risultati delle elaborazioni basate sull'utilizzo dei test statistici di adattamento ( $NMIN=40$ ,  $k$  qualunque, distribuzione di riferimento: GEVPWM)

MODELLO	$T$ (anni)	$NTOT=27242$ , $NSERIE=469$ , $NMED=58.09$ , $\gamma=0.5\pm 0.5$ distr. di riferimento: GEVPWM			$NTOT=30810$ , $NSERIE=514$ , $NMED=59.94$ , $\gamma=1.0\pm 0.5$ distr. di riferimento: GEVPWM			$NTOT=31964$ , $NSERIE=541$ , $NMED=59.08$ , $\gamma=1.5\pm 0.5$ distr. di riferimento: GEVPWM		
		$N^+$	$T_s$ (anni)	Scost. (%)	$N^+$	$T_s$ (anni)	Scost. (%)	$N^+$	$T_s$ (anni)	Scost. (%)



MG	25	-	-	-	-	-	-	-	-	-
GUMBEL	25	926	29	17.68	1429	22	-13.76	1653	19	-22.65
LOGN.	25	903	30	20.67	1379	22	-10.63	1599	20	-20.04
MGGEN	25	-	-	-	-	-	-	-	-	-
GEVMOM	25	1134	24	-3.91	1482	21	-16.84	1629	20	-21.51
GEVPWM	25	1006	27	8.32	1272	24	-3.11	1461	22	-12.49
MG	50	308	88	76.9	458	67	34.54	581	55	10.03
GUMBEL	50	288	95	89.18	662	47	-6.92	964	33	-33.68
LOGN.	50	266	102	104.83	514	60	19.88	745	43	-14.19
MGGEN	50	496	55	9.85	478	64	28.91	472	68	35.44
GEVMOM	50	502	54	8.53	699	44	-11.85	885	36	-27.76
GEVPWM	50	422	65	29.11	478	64	28.91	576	55	10.99
MG	100	105	259	159.45	210	147	46.71	317	101	0.83
GUMBEL	100	60	454	354.03	212	145	45.33	470	68	-31.99
LOGN.	100	50	545	444.84	135	228	128.22	267	120	19.72
MGGEN	100	253	108	7.68	283	109	8.87	302	106	5.84
GEVMOM	100	192	142	41.89	253	122	21.78	358	89	-10.72
GEVPWM	100	173	157	57.47	176	175	75.06	174	184	83.7
MG	200	34	801	300.62	77	400	100.06	154	208	3.78
GUMBEL	200	8	3405	1602.62	46	670	234.89	193	166	-17.19
LOGN.	200	9	3027	1413.44	30	1027	413.5	74	432	115.97
MGGEN	200	130	210	4.78	151	204	2.02	162	197	-1.35
GEVMOM	200	62	439	119.69	64	481	140.7	80	400	99.78
GEVPWM	200	80	341	70.26	67	460	129.93	52	615	207.35
MG	500	6	4540	808.07	19	1622	224.32	51	627	25.35
GUMBEL	500	0	-	-	4	7703	1440.5	32	999	99.78
LOGN.	500	1	27242	5348.4	3	10270	1954	8	3996	699.1
MGGEN	500	35	778	55.67	45	685	36.93	52	615	22.94
GEVMOM	500	10	2724	444.84	8	3851	670.25	2	15982	3096.4
GEVPWM	500	32	851	70.26	27	1141	128.22	20	1598	219.64
MG	1000	1	27242	2624.2	8	3851	285.12	19	1682	68.23
GUMBEL	1000	0	-	-	0	-	-	3	10655	965.47
LOGN.	1000	0	-	-	0	-	-	1	31964	3096.4
MGGEN	1000	11	2477	147.65	17	1812	81.24	22	1453	45.29
GEVMOM	1000	1	27242	2624.2	0	-	-	0	-	-
GEVPWM	1000	21	1297	29.72	15	2054	105.4	6	5327	432.73

**Tab. 5b.** Risultati Risultati delle elaborazioni basate sull'utilizzo dei test statistici di adattamento ( $NMIN=40$ ,  $k$  qualunque, distribuzione di riferimento: GEVPWM)

MODELLO	$T$ (anni)	$NTOT=27947, NSERIE=483,$ $NMED=57.86, \gamma=2.0\pm 0.5$ distr. di riferimento: GEVPWM			$NTOT=21533, NSERIE=368,$ $NMED=58.51, \gamma=2.5\pm 0.5$ distr. di riferimento: GEVPWM			$NTOT=15755, NSERIE=271,$ $NMED=58.14, \gamma=3.0\pm 0.5$ distr. di riferimento: GEVPWM		
		$N^+$	$T_s$ (anni)	Scost. (%)	$N^+$	$T_s$ (anni)	Scost. (%)	$N^+$	$T_s$ (anni)	Scost. (%)
MG	25	-	-	-	-	-	-	-	-	-
GUMBEL	25	1394	20	-19.81	990	22	-13	657	24	-4.08
LOGN.	25	1361	21	-17.86	978	22	-11.93	650	24	-3.05
MGGEN	25	-	-	-	-	-	-	-	-	-
GEVMOM	25	1370	20	-18.4	986	22	-12.65	660	24	-4.52
GEVPWM	25	1321	21	-15.38	1003	21	-14.13	690	23	-8.67
MG	50	614	46	-8.97	509	42	-15.39	360	44	-12.47
GUMBEL	50	960	29	-41.78	734	29	-41.33	491	32	-35.82
LOGN.	50	794	35	-29.6	638	34	-32.5	439	36	-28.22
MGGEN	50	430	65	29.99	333	65	29.33	249	63	26.55
GEVMOM	50	858	33	-34.86	657	33	-34.45	445	35	-29.19
GEVPWM	50	651	43	-14.14	583	37	-26.13	420	38	-24.98
MG	100	377	74	-25.87	353	61	-39	281	56	-43.93
GUMBEL	100	610	46	-54.19	537	40	-59.9	392	40	-59.81
LOGN.	100	368	76	-24.06	368	59	-41.49	299	53	-47.31
MGGEN	100	293	95	-4.62	233	92	-7.58	180	88	-12.47
GEVMOM	100	442	63	-36.77	415	52	-48.11	325	48	-51.52
GEVPWM	100	206	136	35.67	231	93	-6.78	232	68	-32.09
MG	200	223	125	-37.34	232	93	-53.59	208	76	-62.13
GUMBEL	200	348	80	-59.85	380	57	-71.67	316	50	-75.07
LOGN.	200	124	225	12.69	151	143	-28.7	157	100	-49.82
MGGEN	200	160	175	-12.67	139	155	-22.54	113	139	-30.29
GEVMOM	200	118	237	18.42	171	126	-37.04	198	80	-60.21
GEVPWM	200	67	417	108.56	76	283	41.66	77	205	2.31
MG	500	96	291	-41.78	117	184	-63.19	118	134	-73.3
GUMBEL	500	93	301	-39.9	185	116	-76.72	225	70	-86
LOGN.	500	18	1553	210.52	34	633	26.66	34	463	-7.32

MGGEN	500	55	508	1.63	45	479	-4.3	34	463	-7.32
GEVMOM	500	3	9316	1763.13	2	10767	2053.3	0	-	-
GEVPWM	500	14	1996	299.24	15	1436	187.11	15	1050	110.07
MG	1000	39	717	-28.34	65	331	-66.87	67	235	-76.49
GUMBEL	1000	22	1270	27.03	68	317	-68.33	118	134	-86.65
LOGN.	1000	2	13974	1297.35	5	4307	330.66	8	1969	96.94
MGGEN	1000	26	1075	7.49	21	1025	2.54	11	1432	43.23
GEVMOM	1000	0	-	-	0	-	-	0	-	-
GEVPWM	1000	3	9316	831.57	2	10767	976.65	2	7878	687.75

## 5. CONCLUSIONI

Le analisi presentate nel lavoro a partire da un'ampia mole di dati relativi a portate al colmo di piena registrate in diverse regioni del nostro pianeta e basate sull'utilizzo di serie storiche di lunghezza media pari a circa 60 anni mostrano che i test statistici di adattamento normalmente adottati per individuare la funzione di probabilità più idonea ad interpretare serie di dati di portate di piena forniscono risultati in accordo con la procedura proposta nel campo dei tempi di ritorno coperti dai dati sperimentali (o comunque dello stesso ordine) mentre non sono in grado di dare risposte affidabili quando le stime riguardano tempi di ritorno molto elevati  $>100$  anni.

L'applicazione dei test statistici ha anche consentito di valutare le prestazioni dei modelli MG e MG generalizzato rispetto alle altre distribuzioni di probabilità nelle condizioni più sfavorevoli, avendo ristretto l'analisi ad insiemi di serie storiche rispetto alle quali l'adattamento migliore – almeno nel campo dei tempi di ritorno coperti dai test statistici – è fornito da funzioni di probabilità di volta in volta diverse.

Le indagini svolte confermano che per tempi di ritorno elevati la funzioni di probabilità a due parametri più affidabile risulta essere la MG. Il confronto tra le funzioni di probabilità a tre parametri MG generalizzata e GEV mostra infine che la prima funzione fornisce risultati mediamente migliori.

Il criterio proposto, basato sul confronto tra il tempo di ritorno di riferimento  $T$  e il tempo di ritorno sperimentale  $T_s$ , e i risultati ottenuti forniscono indicazioni che possono essere particolarmente utili nella scelta dei modelli probabilistici da utilizzare nella costruzione di modelli regionali finalizzati alla stima sia dei quantili delle portate al colmo che delle massime altezze di precipitazione in assegnata durata (Majone et al., 2010) in corrispondenza di tempi di ritorno molto elevati ( $>100$  anni).

## Bibliografia

- Cunnane C. (1989) Statistical distributions for flood frequency analysis, Report n. 33, WMO, Geneva
- Hosking J. R. M., Wallis J. R., Wood E. F. (1985), Estimation of the Generalized Extreme-Value Distribution by the method of Probability-Weighted Moments, *Technometrics*, 27(3), pp. 251-261
- Klemeš V. (2000a), Tall tales about tails of the hydrological distributions. I, *Journal of the Hydrologic Engineering*, ASCE, 5(3), pp. 227-231
- Klemeš V. (2000b), Tall tales about tails of the hydrological distributions. II, *Journal of the Hydrologic Engineering*, ASCE, 5(3), pp. 232-239
- Maione U. (1997), Un modello probabilistico per le stime delle portate di piena dei corsi d'acqua italiani, in *Atti del seminario "Su nuovi sviluppi applicativi dell'idraulica dei corsi d'acqua"*, in onore del Prof. Claudio Datei, Bressanone, 25-31 gennaio 1997
- Majone, U., Tomirotti, M. (2004), A Transnational regional frequency analysis of peak flood flows, *L'Acqua*, (2), pp. 9-18
- Majone, U., Tomirotti, M., Galimberti, G. (2007), A probabilistic model for the estimation of peak flood flows. In: *Harmonizing the Demands of Art and Nature in Hydraulics. Proceedings of the 32nd Congress of IAHR, Venice, July 1-6 2007 (CD ROM)*
- Majone, U., Tomirotti, M., Galimberti, G. (2009), Modelli probabilistici per la stima delle portate di piena di elevato tempo di ritorno, *L'Acqua*, (3), pp. 9-26
- Majone, U., Tomirotti, M., Galimberti, G. (2010), Un criterio di valutazione delle prestazioni delle funzioni di probabilità applicate alle portate di piena ed alle precipitazioni intense di elevato tempo di ritorno, *L'Acqua*, (6), pp. 9-16
- Meylan P., Favre A. C., Musy A. (2012), *Predictive hydrology. A frequency Analysis Approach*, CRC Press, Boca Raton